XLVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.6. Десятизначные натуральные числа *a, b, c* таковы, что $a + b = c$. Какое наибольшее количество из их 30 цифр могут оказаться нечетными?

9.7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по одному числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающиеся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловые клетки, разность чисел в которых делится на 6?

9.8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Оказалось, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на биссектрисе угла BCD. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на биссектрисе угла ADC.

9.9. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим* в том случае, когда из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида *aabb*, где *a* и *b* — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

9.10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии?

XLVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.6. На доску выписали три натуральных числа: два десятизначных числа a и b, а также их сумму $a + b$. Какое наибольшее количество нечетных цифр могло быть выписано на доске?

10.7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по одному числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающиеся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловые клетки, разность чисел в которых делится на 6?

10.8. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении отрезков AC и BC за точку C отметили точки D и K соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MCK, касаются.

10.9. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. У них есть $n \geq 3$ карточек с номерами 1, 2,. .., n, и ряд из n клеток размером в карточку. Оборотные стороны всех карточек неразличимы. Зритель выкладывает на некоторые два места карточки 1 и 2; помощник фокусника, видя это, выкладывает на свободные места остальные карточки. Затем все карточки переворачиваются числами вниз, и входит фокусник. Он переворачивает одну из карточек, а затем зритель переворачивает другую. После этого фокусник должен правильно указать карточку 1 и правильно указать карточку 2. При каких n фокусник и помощник смогут договориться так, чтобы гарантированно фокус удался?

10.10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии?

XLVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.6. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по одному числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающиеся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловые клетки, разность чисел в которых делится на 6?

11.7. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I параллельно стороне AC проведена прямая ℓ, на которую опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

11.8. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим* в том случае, когда из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

11.9. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет степень 10^5, а его старший коэффициент равен 1. Найдите наименьшую возможную степень многочлена $R(x) = P\left(x^{1000}+1\right) - P(x)^{1000}$

11.10. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа x, y, z на доске стираются, а вместо них записываются числа $x+\frac{1}{yz}, y+\frac{1}{zx}, z+\frac{1}{xy}$. Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел.